



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 14.02.2015

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze suma $S_n = 1 + 12 + 112 + \dots + \underbrace{111 \dots 12}_{(n-1) \text{ ori}}$, pentru $n \geq 2$.

PROBLEMA 2. Fie numerele reale strict pozitive x, y și z , astfel încât $2x + 3y + 4z = 6$. Să se arate că :

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} < \frac{9}{2}$;

b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} \geq \frac{27}{2}$.

PROBLEMA 3. Arătați că $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x).

PROBLEMA 4. Fie pentagonul convex $ABCDE$ și punctele G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv BCD .

a) Arătați că dacă M și N sunt mijloacele segmentelor $[AE]$, respectiv $[DE]$, atunci segmentele

$[G_1N]$ și $[G_2M]$ au un punct comun G , astfel încât $\frac{G_1G}{GN} = \frac{G_2G}{GM}$;

b) Aflați vectorul de poziție al punctului G determinat anterior, în funcție de vectorii de poziție ai punctelor A, B, C, D și E .

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se determine funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{2015}\right) \leq \log_{2015} x \leq f(x) - 1, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

PROBLEMA 2. a) Există numere iraționale a și b pentru care a^b este număr natural?

b) Un elev scrie pe tablă numerele 729, 15625, 343, 1331. La pasul 1 șterge cele patru numere și în locul fiecăruia scrie media geometrică a celorlalte trei numere. La pasul 2 aplică pasul 1 pentru numerele astfel obținute. Continuă în același mod scrierea numerelor.

i) Ce numere a obținut după primul pas?

ii) Este posibil ca după un număr finit de pași să scrie pe tablă numerele 847, 567, 297, 8019?

PROBLEMA 3. Fie numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ și $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $z^2 - z + 5 = 0$. Să se arate că

$$(z - 1)^a - (z + 4)^b = 0$$

dacă și numai dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ și $b = 2n$.

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ și $|a + b|^2 = |b + c|^2 = |c + a|^2 = 4$, atunci triunghiul ABC ale cărui vârfuri sunt punctele de afixe a, b și c este dreptunghic.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 14.02.2015

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + I_3) = \det(A + 2I_3)$. Să se demonstreze că

$$2 \det(A + I_3) + \det(A - I_3) + 6 = 3 \det(A).$$

PROBLEMA 2. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix},$$

unde cu a, b, c se notează lungimile laturilor unui triunghi, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor triunghiului. Să se arate că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$?

PROBLEMA 3. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n^2 + 5n + 9} \}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

PROBLEMA 4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = 3$ și $x_n = x_{n-1} + 2n + 1$, pentru $n \geq 2$.

a) Să se determine termenul general al șirului;

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln 2 + \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{2k-1}} \right) \right)$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$, $O_2 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$.

- a) Demonstrați că dacă $A \in G$ și $\det(A) = \widehat{0}$, atunci $A = O_2$;
- b) Demonstrați că $G \setminus \{O_2\}$ este parte stabilă față de înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$;
- c) Stabiliți dacă ecuația $X^{12} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$, are soluții în mulțimea G .

PROBLEMA 2. Fie (G, \cdot) un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G : xy = yx, \forall y \in G\}$. Să se arate că dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul este comutativ.

PROBLEMA 3. Fie funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} dt$.

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2} dx \in \mathbb{Q}.$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.